सन् 1671 में न्यूटन ने अपने Work "Methods fluxionum et Seriesum Infinitarum" में तीन प्रकार के अवकत्व समीकरणों का वर्ण किया है जो कि इस प्रकार है।

1. $\frac{dy}{dx} = f(x)$ 2. $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$ 3. $x_1 f \frac{\partial f}{\partial x1} + x_2 \frac{\partial f}{\partial x2} = y$

नमस्कार दोस्तों, मैं डॉ0 मनोज कुमार सिंह Assistant Professor Department of Mathematics, U.I.E.T., CSJM University Kanpur (अवकल समीकरण) विषय पर चर्चा करेंगे।

ब्रिट्रिश गणितज्ञ ।कूवतक प्दबमम के अनुसार सन् 1675 में Gottfried Leibritz ने $\int x dx = \frac{1}{2}x^2$ का समीकरण प्रतिपादित किया। तबसे ही अवकल समीकरणों का अध्ययन प्रारम्भ हुआ।

सन् 1676 में छमूजवद ने अपना पहला अवकल समीकरण हल किया। और इसी वर्ष दो चरों x और y के अवकलनों Dx और Dy में सम्बन्ध दिखाने के लिए Leibritz ने पहली बार Differential Equation term को Introduce किया।

अवकल समीकरणों का उपयोग मुख्य रूप से विज्ञान और अभियांत्रिकी के विभिन्न क्षेत्रों जैसे–भौतिकी, रसायन विज्ञान, जीव विज्ञान, मानव विज्ञान, भू–विज्ञान, अर्थशास्त्र आदि क्षेत्रों में किया जाता है।

We indicate few problems of Science as follower

हम कुछ समस्याओं को दर्शाते है जैसे–

1- The Problem of determining the motion of a projectile, rocket or satellite etc.

प्रक्षेप, राकेट या उपग्रह के गति सम्बन्धी समस्या में

2- The problem of determining the change or current in an electric circuit.

विद्युत परिपथ के आवेश और विद्युत धारा सम्बन्धी प्रश्नों में

3- The problem of conduction of heat in a rod or a plate.

विद्युत परिपथ के आवेश और विद्युत धारा सम्बन्धी प्रश्नों में

4. The problem of determining the vibration of a wire or a membrane

5. The study of the rate of decomposition of a radioactive substance or the rate of growth of a population.
6. The study of reactions of Chemicals.
7. The problem of determining the curves that have certain geometrical properties, etc.

अर्थात् सभी आधुनिक वैज्ञानिक अन्वेषणों के लिए अवकल समीकरणों के गहन अध्ययन की अत्यन्त आवश्यकता है।

अवकल समीकरण (Differential Equation) Modern Mathematics की एक बड़ी और महत्वपूर्ण शाखा है। Calculus के प्रारम्भ से ही यह विषय शैधान्तिक शोध और व्यवहारिक उपयोग से जुड़ा रहा है।

इसमें अब हम विभिन्न प्रश्नों पर विचार करते है।

1. What is differential Equation.
   अवकल समीकरण क्या है।
2. What does it Signifies.
   यह क्या दर्शाता है।
3. Where and how do differential equation originate.
   कहाँ और कैसे अवकल समीकरण उत्पन्न होता है।
4. What are the use of differential Equation.
   अवकल समीकरण का उपयोग क्या है।
5. What does one do it.
6. How does one do it.
7. What are the result of such activity.

These questions indicate three major aspects of the subject theory, methods and application.

ये सभी प्रश्न इस विषय के तीन बड़े पहलुओं, सिद्धान्त, विधियों और अनुप्रयोग की तरफ इसारा करते है।

What is differential Equation.

An equation involving derivatives of one or more dependent variables with respect to one or more independent variables is called a differential equation.

एक ऐसा समीकरण जिसमें स्वतंत्र चर (अथवा चरो) के सापेक्ष आश्रित चर (एक या एक से अधिक) के अवकलन (Differentials) सम्मिलित हो। अवकल समीकरण कहलाता है।

The equations x+y=3, 2sinx+3cosy = 0 and $x^2+y^2=a^2$ have only dependent and in depend variables.

समीकरण x+y=3, 2sinx+3cosy = 0 में केवल स्वतंत्र और आश्रित चर शामिल है। अतः ये अवकल समीकरण नहीं है।

Now we discuss the equation $x\frac{dy}{dx}+y=0$

In this equation y is dependent variable and x is independent variable and it include the derivative of y with respect to x, therefore it is a differential equation.

समीकरण $x\frac{dy}{dx}+y=0$ में x एक स्वतंत्र चर है और y एक आश्रित चर है। इस समीकरण में स्वतंत्र चर x के सापेक्ष आश्रित चर y का अवकलन भी सम्मिलित है।

इस प्रकार का समीकरण अवकल समीकरण कहलाता है।

A differential equation involving ordinary derivatives of one or more dependent variables with respect to a single independent variables is called an ordinary differential equation.

एक ऐसा अवकल समीकरण जिसमें केवल एक स्वतंत्र चर के सापेक्ष आश्रित चर (अथवा चरों) के अवकलन सम्मिलित हो, सामान्य अवकल समीकरण कहलाता है।

जैसे $-\frac{d^2y}{dx^2}+xy\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=0,\ \frac{d^4x}{dt^4}+5\frac{d^2x}{dt^2}+3x=sin\ t$

इन सभी अवकल समीकरणों में एक स्वतंत्र चर एवं एक आश्रित चर है। अतः ऐ सामान्य अवकल समीकरण है।

निःसन्देह ऐसे भी अवकल समीकरण होते है। जिसमें एक से अधिक स्वतंत्र चरों के सापेक्ष अवकलन शामिल होते है। इस प्रकार के अवकल समीकरण को आंशिक अवकल समीकरण कहते है।

A differential equation involving partial derivatives of one or more dependent variables with respect to more than on independent variables is called a partial differential equation.

For Example -

$$\frac{\partial v}{\partial s}+\frac{\partial v}{\partial t}=0$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}=0$$

लेकिन आज हम अपने आप को केवल सामान्य अवकल समीकरणों तक ही सीमित रखेंगे।

The differential equation signifies the relationship between a continuously verging quantity and its rate of change.

This is very essential in all Scientific investigations.

अवकल समीकरण एक सतत् चर राशि और इसके परिवर्तन की दर के सम्बन्ध में दर्शाता है। जोकि सभी वैज्ञानिक अन्वेषणों के लिए अत्यन्त ही आवश्यक है।

Currently we discuss some scientific problem in each of the above problem, the object involved under consideration obey certain scientific lows.

These lows involve various rates of change of one or more quantities with respect to other quantities. The mathematical formulation of such problems gives to differential equation.

अभी हम लोगों ने कुछ समस्याओं को दर्शाया है। ये सभी समस्यायें कुछ निश्चित वैज्ञानिक नियमों का पालन करती है। इन नियमों में एक या अधिक राशियों की दूसरे राशियों के सापेक्ष विभिन्न परिवर्तन की दर शामिल होती है। जिसका गणितीय रूपान्तरण एक अवकल समीकरण देता है।

हम भौतिक जीवन की बहुत सारी समस्याओं को जब गणितीय समस्या के रूप में लिखते है तो ये समस्यायें अवकल समीकरण के रूप में परिवर्तित हो जाती है। फिर हम इन समस्याओं का हल गणित की सहायता से करके इसके परिणाम को फिर भौतिक जीवन के समस्या के हल के रूप में व्याख्या करते हैं।

The study of differential equation is a wide field in pure and applied mathematics, physics and engineering. All there disciplines are concerned with the properties of various types of differential Equations. Pure mathematics focuses on the existence and uniqueness of solution. While applied mathematics emphasizes the rigorous justification at the methods for approximating solution.

अवकल समीकरण का अध्ययन विशुद्ध गणित Pure Mathematics और अनुप्रयुक्त गणित, भौतिकी और अभियांत्रिकी के क्षेत्रों में किया जाता है। ये सभी विधाये विभिन्न प्रकार के अवकल समीकरणो के गुणो से कर्न्सन्ड होती है। विशद्ध गणित अवकल समीकरणों के हल के Existence and Uniqueness अस्तित्व और अद्वितीयता पर केन्द्रीत होती है। जबकि अनुप्रयुक्त गणित Approximate Solution (अनुमानित हल) के कठोर औचित्य पर जोर देती है।

Many fundamental low of physics and chemistry can be formulated as differential equations. In biology and economics differential equations are used to model the behaviour of complex system.

भौतिक और रसायन शास्त्र के अनेक मूलभूत नियम अवकल समीकरणों के रूप में प्रतिपादित किये जा सकते है। जीवविज्ञान और अर्थशास्त्र में अवकल समीकरों का प्रयोग जटिल प्रणाली के व्यवहारिक उपयोग के लिए किया जाता है।

अब हम अवकल समीकरण के हल, प्रकार आदि के बारे में चर्चा करते हें।

हल : किसी समीकरण का हल एक ऐसी वास्तविक या समिश्र संख्या है। जो इस समीकरण को संतुष्ट करेगा। अर्थात् जब इस संख्या को समीकरण में अज्ञान राशि के स्थान पर प्रतिस्थापित करते तो L.H.S. और R.H.S. आपस में बराबर हो जाये।

ठीक इसी प्रकार किसी अवकल समीकरण जैसे $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$ का हल एक फलन Ø होगा जो इस समीकरण को संतुष्ट करेगा अर्थात् जब इस फलन को अवकल समीकरण में अज्ञात y के स्थान पर रखे तो समीकरण का L.H.S. और R.H.S. आपस में बराबर हो जाय।

An equation containing dependent variable y and independent variable x and free from derivatives, which satisfies the differential equation is called the solution of the differential equation.

समीकरण y=Ø(x) एक वक्र को प्रदर्शित करता है। जो अवकल समीकरण का हल वक्र या Integral Curve समाकलन वक्र कहलाता है।

अवकल समीकरण की कोटि – Order of a differential equation

किसी अवकल समीकरण की कोटि उस अवकल समीकरण में सम्मिलित स्वतंत्र चर के सापेक्ष आश्रित चर के उच्चतम कोटि के अवकलन की कोटि द्वारा परिभाषित होती है।

जैसे – अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx} + y = 0$ प्रथम कोटि का अवकल समीकरण है।

इसी प्रकार Differential equation $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$ द्वितीय कोटि का अवकल समीकरण है क्योंकि इसमें द्वितीय कोटि का अवकलन प्रयुक्त हुआ है।

अवकल समीकरणों की घात (Degree of a Differential Equation) – The degree of a differential equation is defined as the power of highest order derivative present in the differential equation after removing radials and fractions.

अर्थात् एक अवकल समीकरण की घात उस अवकल समीकरण में उपस्थित उच्चतम कोटि के अवकलन की उच्चतम घात (धनात्मक पूर्णांक)

किसी अवकल समीकरण की कोटि और घात हमेशा धनात्मक पूर्णांक होती है। बशर्ते की घात परिभाषित हो।

जैसे अवकल समीकरण $xy\frac{d^2y}{dx^2} + x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - y\frac{dy}{dx} = 0$ में घात 1 और कोटि 2 है।

और अवकल समीकरण $y^{111} = y^2 + e^{y1} = 0$ में, y^{111} उच्चतम कोटि का अवकलन है। इसलिए इसकी कोटि 3 है। इस समीकरण का Left Hand Side के अवकलनों में बहुपद नहीं होने के कारण इसकी घात परिभाषित नहीं हो सकती ।

General and Particular solution of a differential Equation अवकल समीकरण के व्यापक एवं विशिष्ट हल। हम अवकल समीकरणों के हल के बारे में अभी चर्चा कर चुके हैं।

अब हम अवकल समीकरण $\frac{d^2y}{dx^2} + Y = 0$ --------------- – (1) के हल पर विचार करेंगे।

हम देखते है कि फलन y = $\emptyset$(x) = a sin(x+b) --------------- – (2) जहां a और b वास्तविक संख्यायें है। समीकरण – (1) का एक हल है। क्योंकि इस फलन और इसके अवकलनों को समीकरण (1) में प्रतिस्थापित करें तो समीकरण (1) के Left hand side और Right hand side आपस में बराबर हो जायेंगे। अतः यह फलन अवकल समीकरण (1) का हल हुआ।

अब हम a और b के कुछ विशिष्ट मान रख दे।

जैसे a = 3 और b = $\pi/2$ तो फलन y= $\emptyset_1$(2) = 3 sin(x+π/2) ----------(3) हो जायेगा। यदि इस फलन और इसके अवकलनों को समी0 (1) में पुनः रखे तो फिर L.H.S और R.H.S. आपस में बराबर हो जायेंगे। इसलिए फलन $\emptyset_1$(x) भी समी0(1) का एक हल हुआ।

फलन $\emptyset_2$ - a sin (x+b) ------- (2) दो स्वेच्छ अचर a और b है। तथा यह फलन समीकरण – (1) का व्यापक हल कहलाता है। जबकि फलन $\emptyset_1$(x)=3sin(x+π/2) म में कोई भी स्वेच्छ अचर नहीं है। परन्तु प्रांचल a और b के विशिष्ट मान उपस्थित है।

अतः फलन $\emptyset_1$(x) समीकरण (1) का विशिष्ट हल कहलायेगा।

अब हम लोग Differential equation of first order and first degree, प्रथम घात और प्रथम कोटि के अवकल समीकरणों पर विचार करते है।

एक अवकल समीकरण जो $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ के रूप में लिखा जाये प्रथम कोटि और प्रथम घात का अवकल समीकरण कहलाता है।

इस प्रकार के अवकल समी0 को हल करने के लिए निम्न विधिया हैं –

1. चरों के पृथक्करणीय विधि

   Equations solvable by sepration of variables

2. समघातिया अवकल समी0

   Homogeneous Equation methods

3. रैखिक अवकल समी0

   Linear Equation of first order

4. सटिक अवकल समी0

   Exact differential equation

1. प्रथक्करणीय चर वाले अवकल समीकरण (Differential equations with variables separable)

प्रथम घात और प्रथम कोटि के अवकल समीकरण को फलन $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ के रूप में निरूपित करते है। अगर f(x,y) के दो फलनों के गुणनफल g(x) h(y) के रूप में लिखा जा सकता है। जहां g(x) केवल ग का फलन है। और h(y) केवल ल का एक फलन है तो इस प्रकार का अवकल समीकरण पृथकक्रणीय चर वाला समीकरण कहलाता है।

अब यह अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx} = h(y).g(x)$ होगा।

अब यदि h(y) $\neq$ 0 तो चरो को अलग करके इस समीकरण को हम $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ के रूप लिख सकते है।

अब यदि इस समीकरण के दोनो पक्षें को समकालन करने पर $\int \frac{1}{h(y)} dy = \int g(x) dx$ प्राप्त होगा।

जिसका हल h(y)=g(x)+c होगा

जहा h(y) व g(x) क्रमशः $\frac{1}{h(y)}$ व g(x) का समाकलन है। और C एक स्वेच्छ अचर है।

अब हम इस विधि को एक Problem से समझते है। हमारे पास एक Problem $\frac{dy}{dx} = x\frac{y^2+1}{x+1}$ है।

इसको हम $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{(x+1)}.(y^2+1)$ के रूप में भी लिखा जा सकता है। अब इस g(x) Problem में g(x)=$\frac{x}{x+1}$ हुआ और h(y)= (y^2+1) यानि की Right hand side f(x,y) को हम दो Single Variable g(x) और h(y) के गुणनफल के रूप में लिख सकते है।

अब इसको हम $\frac{1}{y^2+1}dy = \frac{x}{x+1}dx$ के रूप में जहाँ Left Hand Side केवल ल का फलन है। और Right hand side x का फलन है के रूप में लिख सकते है।

अब दोनो पक्षों को समाकलित करेंगे तो

L.H.S. $\tan^{-1}y$ और R.H.S. x-log(x+1)+c हो जायेगा।

जहाँ पर C और arbitrary Constant है। इस प्रकार $\text{Tan}^{-1}y$ = x-log(x+1)+C दिये गये अवकल समीकरण का एक व्यापक हल हुआ।

अब एक दूसरी समस्या पर विचार करते है जैसे– किसी बैंक मे मूलधन की वृद्धि 5 प्रतिशत वार्षिक की दर से होती है। कितने वर्षों में Rs. 1000 की राशि दुगुनी हो जायेगी।

अब इसको हल करते हे।

माना किसी समय t पर मूलधन P है तो दी हुई समस्या के अनुसार $\frac{dp}{dt} = \left(\frac{5}{100}\right) \times P$

या $\frac{dp}{dt} = \left(\frac{P}{20}\right)$ अब इस मसीकरण में चरों को पृथक करते है तो हमें $\frac{dp}{P} = \frac{dt}{20}$ प्राप्त होगा।

अब इसको (Integrate) करें तो हमें $logP\frac{1}{20}t + logC$ मिलेंगे इसको हम $P = ce^{t/20}$ लिख सकते है।

अब P = 1000 रखे, जब समय t=0 है तो हमें C=1000 मिलेगा। इस प्रकार हमें $P = 1000e^{t1/20}$ = t1 = 20 log 2.

यानी की 20log2 समय में 1000 रूपये 5 प्रतिशत वार्षिक ब्याज की दर से दुगनी हो जायेगी।

इसी प्रकार हम इस समस्या को भी हल कर सकते है। जैसे – किसी जीवाणू समूह में जीवाणुओं की संख्या 100000/– है। 2 घंटों में इनकी संख्या में 10 प्रतिश की वृद्धि हो जायेगी, यदि जीवाणुओं में जीवाणुओं की संख्या – 200000 हो जायेगी, यदि जीवाणुओं के वृद्धि की दर नके उपस्थित संख्या के समानुपाती है।

Equations Reducible to variable separable form.

हम कुछ सामान्य परिवर्तनों द्वारा भी कुछ विशेष प्रकार के अवकल समीकरणों को चर पृथक्करणीय विधि से हल कर सकते है। समघातीय अवकल समीकरण (Homo. D.E.) अब हम दूसरे विधि के बारे में चर्चा करते है।

यदि किसी फलन का प्रत्येक पद समान घात का है तो उसे समघात फलन कहते है।

जैसे – $f(x,y) = x^2+2xy+y^2$ अब प्रश्नयह उठता है कि कौन सा फलन समघात नहीं होगा तो $f1(x,y)=x^2+3x$ में प्रथम पद द्विघातीय है। द्विपदीय पर प्रथम घात का है तो यह फलन समघातीय नहीं है।

एक ऐसा अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$ जिसमें f(x,y) शून्य घात वाला समघातीय फलन हो तो इस प्रकार के अवकल समीकरण को समघातीय अवकल समीकरण कहते है। इस प्रकार के समीकरण को हल करने के लिए हम $\frac{y}{x} = v$ अर्थात् y=vx रखते है।

अब इस समीकरण को x के सापेक्ष अवकलन करने पर हमें $\frac{dy}{dx} = v + x\left(\frac{dv}{dx}\right)$ प्राप्त होगा। अब इसका मान और y = vx के मानदिये गये अवकल समीकरण में रखने पर हमारा मूल अवकल समीकरण v और x चरों वाले समीकरण में परिवर्तित हो जायेगा। जिसको हम चर पृथक्करणीय विधि से हल कर सकते है। इसको हल करने के उपरान्त हम चर v का मान y/x रखकर पुनः एक Relation जो केवल x और y चर के रूप में है। प्राप्त कर सकते है। यही Relation दिये गये समघात अवकल समीकरण का हल हुआ।

कुछ अवकल समीकरण ऐसे भी होते है जिनको हम समघातीय अवकल समीकरण में परिवर्तित कर सकते है। इस प्रकार के अवकल समीकरण को फिर समघातीय विधि से हल कर सकते है।

Linear Differential Equations : रैखिक अवकल समीकरण

अगर अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx} + P(x) = Q(x)$ रूप का है तो यह एक रैखिक अवकल समीकरण कहलायेगा। आदि P और Q दोनो ही चर अथवा केवल x के Function हो।

इस प्रकार के अवकल समीकरण का हल

$y.e^{\int pdx} = \int Q.e^{\int pdx}\,dx + C$ होता है। जहाँ C एक स्वेच्छ अचर है। और $e^{\int pdx}$ को समाकलन गुणांक (Integrating Factor) कहते है।

इस प्रकार के अवकलन समीकरणों के हल को निम्न चरणों में पूरा करते है।

1. सबसे पहले दियेगये अवकल समीकरण को $\frac{dy}{dx} + Py = Q$ के रूप में लिखते है। जिसमें P और Q कोई स्वेच्छ अचर या केवल x के फलन हो।
2. समाकलन गुणांक (Integrating Factor) $e^{\int pdx}$ ज्ञात करते है।
3. अब समीकरण के हल के लिए इस समकालन को ज्ञात करते है।

$$y.I.F. = \int Q.I.F.dx + C$$

Leibritz 1675 से एक ऐसी समस्या में मग्न थे जिसमें वो ऐसे वक्त को ज्ञात करना चाह रहे थे जिसकी स्पर्श रेखा दी गयी हो सन् 1691 में इस समस्या का समाधान चरो के पृथक्करीय विधि के अन्वेषण के रूप में प्राप्त किये इसके एक वर्श बाद उन्होंने प्रथम कोटि के समघातीय अवकल समीकरणों को हल करने की विधि को प्रतिपादित किया। इसी क्रम में उन्होंने अप्ल समय में ही प्रथम कोटि के रैखिक अवकल समीकरणों के हल की विधि का भी अन्वेषण किया। यह आश्चर्यजनक ही है कि इन सभी विधियों की खोज अकेले एक ही व्यक्ति द्वारा अवकल समीकरणों के जन्म के पच्चीस वर्शे के अल्पावधि में ही की गयी।

शुरूआत में अवकल समीकरणों को हल करने की विधि को अवकल समीकरणों के समाकलन के रूप में ही निरूपित करते थे, सन् 1690 में सबसे पहले James Bernaulli ने

Integral of the differential Equations अवकल समीकरणों के समाकलन शब्द को दिया। और सन् 1974 में सर्वप्रथम Joseph Louis Lagrange ने हल शब्द का प्रयोग किया यानि की Solution of the Differential Equation.